数理解析研究所講究録
474巻 1982年 98-116

幾何種数の計算公式と楕円型特異点について

京大 数理研　泊 昌孝

Introduction　2次元有理特異点が blowing up による単純な resolution process (absolutely isolatedness) を有することは，Brieskorn，Tjurina，Lipmann により明らかにされている。また2重点を大前提とすると，Brieskorn [1] はその特徴付けを与えている。我々は resolution process によって特異点を解析することを目標とする。まず，有理2重点の場合を Special に含む「resolution process と invariants」に関する理論を構成してゆくのが目的である。1次元の場合にその型の議論を求めると，infinitely near singular points の重複度を用いた conductor number formula がある。2次元正規特異点に対して同様なことを考えると，まず p_g（幾何種数）-formula が要求される。しかし，conductor 的な numerical invariant を「resolution space の標準因子から引き出されるもの」ととらえると，invariant (for 1次元) に対応するのは p_g だけで

はないように思われる。Wagreich の導入した p_a もそうである。これは，resolution の例外集合の dual graph の交さ形式にのみに依る。また，筆者が導入（§2 に於て）する invariant L（for 2次元 Gorenstein 特異点）も標準因子と resolution process に依る量である。これら invariants の間の特殊な関係式は，resolution process の何に注目するべきであるかをさぐる手がかりになるのではないか。

このノートに於けるプログラムは次の通り。§1 では，blowing up（with smooth compact center）の center に関する Hilbert–Samuel 関数によって p_g が計算されることを示す。§2 では，Gorenstein で $p_a = 1$ なる特異点の resolution process に関する必要条件を導き，更に超曲面 3 重点の場合について特徴付けを与える（2 重点については [11] を参照）。§3 では，以上の考察を背景にひとつの問題を提出する。以上，詳細は [12] も参照して下さい。また，このノートでの諸概念の定義は [3] を参照．ただし，我々は Wagreich [13] に従って，楕円型特異点を $p_a = 1$ によりさだめる。

§1　Hilbert-Samuel 関数と p_g -formula

初めに，compact complex analytic space を blowing up した時，構造層の Euler - Poincaré characteristic がいかに変化するかを

計算し，それを p_g-formula へ応用する。

<u>定理 1</u>　Compact 複素解析空間 $\bar{V}$，及びその部分多様体 C が，次の 2 条件を満すとする。(*) $\bar{V}$ は C の近傍で global に ambient 多様体を有する（i.e., $\bar{V}$ における C の開近傍 V が存在して，ある多様体 $\sqcup$ に $V \hookrightarrow \sqcup$ closed に埋め込まれている）。(**) C を center とする V 及び $\bar{V}$ の blowing up を $\psi: V_1 \to V$（及び $\psi: \bar{V}_1 \to \bar{V}$）とする時，標準写像 $\mathcal{O}_V \to \psi_* \mathcal{O}_{V_1}$ が単射である。

この時，次の等式が成立する。

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ P(k) - \chi\left(\mathcal{I}_C^k \mathcal{O}_V / \mathcal{I}_C^{k+1} \mathcal{O}_V \right) \right\}.$$

ただし，ideal sheaf $\mathcal{I}_C$ は C の定義 ideal。k の関数 $P(k)$ は

$$P(k) = \chi\left(\mathcal{I}_C^k \mathcal{O}_V / \mathcal{I}_C^{k+1} \mathcal{O}_V \right) \qquad k：十分大，$$

によって定まる，多項式である。

<u>注</u>① $\dim V = 1$ の時は，D.Kirby により証明されている [4]。② 条件 (**) は，例えば，V が reduced であって，C が V の各既約成分に対して codim > 0 の時に成立する。

<u>例 1</u>　center C を 1 点 p，すなわち local ring $\mathcal{O}_{V,p}$ の極大 ideal $\mathfrak{m}_{V,p}$ を center にとると，$\chi\left(\mathfrak{m}^k \mathcal{O}_V / \mathfrak{m}^{k+1} \mathcal{O}_V \right)$ は，$\mathcal{O}_{V,p}$ の

Hilbert-Samuel関数 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ であり，$P(k)$ はその Hilbert-Samuel 多項式である。特殊な場合に定理1の右辺を計算してみる。① (V,p) : n次元超曲面かつ $\mathrm{mult}_p V = \rho$ とすると $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = (-1)^{n+1}\binom{\rho}{n+1}$ である（補題1を参照）

② $(V.p)$: n 次元で $(\mathbb{C}^{n+2}, 0)$ に tangential に complete intersection となって埋めこまれており，定義 ideal の standard basis の degree を (d_1, d_2) とする。$n=1$ の時 $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = \frac{1}{2}d_1d_2(d_1+d_2-2)$ (Northcott [7])。$n=2$ の時は $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = -\frac{1}{12}d_1d_2\{2(d_1+d_2)^2 - d_1d_2 - 9(d_1+d_2)+11\}$ となる。

③ $\dim V = 2$，(V,p) : Cohen-Macaulay with maximal embedding dim. i.e., $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathrm{mult}_p V + 1$ の時，$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} = (\mathrm{mult}_p V)k + 1$ $k \geq 0$ である (Sally [9],[10] 参照)。ゆえに，$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = 0$.

④ $\dim V = 2$. (V,p) : Gorenstein with maximal embedding dim かつ $\mathrm{mult}_p V \geq 3$. i.e., $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathrm{mult}_p V \geq 3$ の時，$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} = (\mathrm{mult}_p V)k$ $k \geq 1$ である (Sally [9].[10] 参). ゆえに，$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = -1$ である。

以後，常に特異点 (V,p) として2次元を仮定する。2次元正規特異点 $(V.p)$ について，(V は代数的であるとして良いので) compact解析空間 $\bar{V}$ を $V \underset{\text{open}}{\subset} \bar{V}$ となるようにとれる。V は多様体 U に closed に埋めこまれているとしよう。

特異点 (V, p) について，blowing up with smooth center の合成による resolution をとると，data $(\mathcal{U}, \overline{V}, V)$ に対して次の図(☆)が定まる。

$$
(\star)\quad
\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 & \xleftarrow{\psi_1} & \mathcal{U}_1 & \xleftarrow{\psi_2} & \cdots & \xleftarrow{\psi_N} & \mathcal{U}_N & & \\
\cup & & \cup & & & & \cup & & \\
V = V_0 & \longleftarrow & V_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_N & = \tilde{V} & \\
\cap & & \cap & & & & \cap & & \\
\overline{V} = \overline{V}_0 & \longleftarrow & \overline{V}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \overline{V}_N & &
\end{array}
$$

$\psi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathcal{U}_{i-1}$: the blowing up of $\mathcal{U}_{i-1}$ with center I_{C_i}.

ただし，$I_{C_i}\mathcal{O}_{V_{i-1}} = \mathcal{I}_{C_i}$，$C_i$ は V_{i-1} の closed submanifold.

V_i ; blowing up ψ_i による V_{i-1} の強変換像

$\overline{V}_i$: V の compact 化 $\overline{V}$ より canonical に induce されるもの.

$\Theta_i^{(i)}$: $\mathcal{U}_i$ における ψ_i の例外集合。$\psi_i^{-1}(I_{C_i})$ により定まる.

$\Theta_i^{(j)}$ (for $i<j$) : $\Theta_i^{(i)}$ の $\psi_j \circ \cdots \circ \psi_{i+1}$ による強変換像.

E_i : V_i に於ける，blowing up $\psi_i : V_i \to V_{i-1}$ の例外集合.

h_i : $h_i \leqq \mathcal{I}_{\Theta_i^{(i)}} / \mathcal{I}^2_{\Theta_i^{(i)}} \in \mathrm{Pic}(\Theta_i^{(i)})$.

W_i : resolution 多様体 $\tilde{V}$ 上に $(\psi_i \circ \cdots \circ \psi_N)^{-1}(I_{C_i})$ なる $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_N}$-ideal sheaf を制限して，定まる effective Cartier divisor.

今，(V, p) reduced であるから，各 V_i は reduced である (p317 [2]) ゆえに (V_{i-1}, C_i) について定理1 の条件は成立している。Leray の spectral sequence を $\overline{V}_N \longrightarrow \overline{V}$ に適用して．$-p_g(V, p) = \chi(\mathcal{O}_{\overline{V}_N}) - \chi(\mathcal{O}_{\overline{V}})$ が かるので，定理 1

は Hilbert-Samuel 関数 $\chi(\mathscr{I}_{C_i}^{k}/\mathscr{I}_{C_i}^{k+1})$ の言葉で，ひとつの p_g-formula を与えている。

もう少し具体的な表示を超曲面 (V,p) の場合について与える。

<u>定理2</u>　(V,p) 2次元超曲面孤立特異点について，resolution (✡) をとり fix する。次の等式が成立する。

(i) $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) = -\frac{1}{6}\rho_i(\rho_i-1)(\rho_i-2)$　center C_i : point.

(ii) $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i})-\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) = -\frac{1}{6}\rho_i(\rho_i-1)(\rho_i+1)h_i^2-\frac{1}{2}(\rho_i-1)\rho_i(g_i-1-r_i')$

$= \frac{1}{12}\rho_i(\rho_i-1)(\rho_i-2)h_i^2-\frac{1}{4}(\rho_i-1)E_i^2-\frac{1}{2}\rho_i(\rho_i-1)(g_i-1)$

center C_i が compact nonsingular curve の時.

ただし，ρ_i :　center C_i の ある Zariski open set の各点での V_{i-1} の重複度.

r_i' : は $E_i \equiv \rho_i h_i - r_i' f_i$ と $\mathrm{Num}(\Theta_i^{(i)}) = \mathbb{Z}h_i \oplus \mathbb{Z}f_i$ という分解より定まる数. f_i は $\Theta_i^{(i)} \to C_i$ の fiber.

g_i : genus of C_i.

E_i^2, h_i^2 ; $\Theta_i^{(i)}$ (今2次元) 上での交点数.

証明は，次の補題に，Riemann-Roch-Hirzebruch の公式を用いれば良い。

<u>補題1</u>．記号を定理1と同様とし，$\dim W = \dim V + 1$

を仮定する。2次元(☆)と同じ図をつくる。次の等式が成立する。 $\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_1}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}}) = -\sum_{j=1}^{\rho_1} \chi\left(\mathcal{I}_{\theta_1^{(1)}}^{\,j-1} / \mathcal{I}_{\theta_1^{(1)}}^{\,j} \otimes \mathcal{I}_{V_1} \right)$.

ここで，$\mathcal{O}_{U_1}$-ideal sheaf $\mathcal{I}_{V_1}$ は V_1 の定義 ideal. $\rho_1, \theta_1^{(1)}$ は2次元の場合に準ずる.

我々は，更に，次の計算の為の補題を得る。

<u>補題2</u>　定理2の仮定の下に，次の等式が成立する。

(i) $W_i^2 = -\rho_i$　center C_i が point（勿論 Prop2.7 [13] より出る）。

$W_i^2 = -\rho_i h_i^2 + r_i'$　center C_i が curve.

(ii) $r_i' = \sum_{j<i} \dfrac{\rho_j W_j \circ W_i}{\rho_i}$

これより，定理2の結果は数値としては統一的に

$$\chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_i}) - \chi(\mathcal{O}_{\bar{V}_{i-1}}) = \frac{1}{6}(\rho_i - 1)(2\rho_i - 1)\sum_{j<i} \frac{\rho_j W_j \circ W_i}{\rho_i} + \frac{1}{6}(\rho_i^2 - 1)W_i^2 + \frac{1}{2}\rho_i(\rho_i - 1)\,\chi(\mathcal{O}_{C_i})$$

と書ける。通常の resolution の計算及び，例外集合の weighted dual graph を求める手つづきで，p_g が計算できることがわかる。（また，2重点 (V, p) の canonical resolution について [11] で使った Lemma 2 [11]，もこれから容易に導かれる。）

§2　楕円型特異点の resolution process について

この節では，次の定理をめぐって論ずる。

<u>定理 3</u>　2次元超曲面孤立特異点 (V, p) であって重複度が3以上とすると，次の3条件は同値である。(a) $p_a = 1$ (i.e., 楕円型) (b) $p_g = 1$ (c) (V, p) は3重点であり，次の resolution を持つ。$V_N \xrightarrow{\psi_N} V_{N-1} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\psi_1} V$，$\psi_k$; blowing up with smooth center，整数 M $(\leqq N)$ があって，次の条件が $1 \leqq k \leqq M$ で成立する。(i) V_k ; 正規 (ii) ψ_k ; with center p_k 及び $\mathrm{mult}_{p_k} V_{k-1} = 3$ (iii) $V_{k-1} - \{p_k\}$ の各点の重複度は高々2 (iv) V_M の各点の重複度は高々2. (v) $p_k \notin \bigcup_{j \leqq k-2} \Theta_j^{(k-1)}$ ($\Theta_j^{(k)}$ については §1 の (☆) を参照)。

この statement の証明に入る前に，少しながめてみよう。implication (c) ⇒ (a) で $M = 1$ としてみよう。それは「超曲面3重点 (V, p) は，1回 p で blowing up して，正規かつ，重複度がすべての点で落ちていれば $p_a = 1$ である。」となる。(少々非数学的な発言となるが) 筆者には，この部分証明はできるのだが，もうひとつ良く理解できない。それについては，次節で述べる。(*) この節の目的は，定理3の証明の

(*) 「手計算で…」としか言えないことがくやしいのである。

仕組を説明することである。

まず，2次元正規 Gorenstein 特異点 (V, p) について，invariant $L(V,p)$ を定めよう。resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \to (V, p)$ をとる。(V,p) Gorenstein であるので，resolution 多様体 $\tilde{V}$ の canonical line bundle は，例外集合 A $\left(= \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right.$ と既約分解する $\left.\right)$ の近傍では，ある integral divisor $\sum_{i=1}^{m} k_i A_i$ ($k_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,\cdots,m$) により定まる line bundle となる。この divisor を標準因子と呼び $K_{\tilde{V}}$ と書く。次に，blowing down $(\tilde{V}, A) \xrightarrow{\psi} (V, p)$ に対する極大イデアル因子とは，次の様に定まる $\tilde{V}$ 上の effective Cartier divisor Y_ψ である。

$$Y_\psi = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \inf_{h \in m_{V,p}} \mathrm{ord}_{A_j}(\psi^* h) \right\} A_j$$

ここで，$m_{V,p}$ は local ring $\mathcal{O}_{V,p}$ の極大イデアル，$\mathrm{ord}_{A_j}(\psi^* h)$ は関数 $\psi^* h$ の A_j の generic な点での vanishing order である。実さいには，ある $h \in m_{V,p}$ があって，$Y_\psi = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ord}_{A_j}(\psi^* h) A_j$ と書ける。$|Y_\psi|$ (Y_ψ の台) は例外集合全体であるから，次式の右辺は意味を持ち，これで $L(V,p)$ を定める。

$$L(V,p) = \min\{ \alpha \in \mathbb{Z} \mid -K_{\tilde{V}} \leqq \alpha Y_\psi \}.$$

これは，resolution ψ のとり方に依らずにきまる非負な数である。$L(V,p)$ を p_g と関係づけよう。その準備として，Laufer による p_g の表現をふく習する。V: Stein かつ $V-\{p\}$ smooth

にとる時，次の等式が成立する（Th3.4 [5]）。

$$p_g(V,p) = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(\tilde{V}-A,\Omega^2_{\tilde{V}}) / \Gamma(\tilde{V},\Omega^2_{\tilde{V}}) 。$$

ここで $\Omega^2_{\tilde{V}}$ は $\tilde{V}$ 上の正則2形式の層である。Gorenstein (V,p) については，$\tilde{V}-A$ 上の nowhere vanishing な正則2形式，ω としよう，を用いて，$\Gamma(\tilde{V}-A,\Omega^2_{\tilde{V}}) / \Gamma(\tilde{V},\Omega^2_{\tilde{V}}) = \Gamma(V,\mathcal{O}_V)\,\mathrm{cl}[\omega]$ と書ける。$\mathrm{cl}[\omega]$ は，ω が左辺に於いて定めるclassのこと。

命題1　(V,p)：2次元正規Gorenstein特異点について，

$$L(V,p) = \max_{h\in\mathfrak{m}_{V,p}} \left\{ \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathbb{C}[\psi^*(h)]\,\mathrm{cl}[\omega] \right) \right\}$$

である。ただし，$\mathbb{C}[\psi^*(h)]\,\mathrm{cl}[\omega]$ とは，$\Gamma(\tilde{V}-A,\Omega^2_{\tilde{V}})$ の $\mathbb{C}$-部分空間 $\bigoplus_{l\geq 0}\mathbb{C}(\psi^*(h))^l\omega$ より定まる $\Gamma(\tilde{V}-A,\Omega^2_{\tilde{V}}) / \Gamma(\tilde{V},\Omega^2_{\tilde{V}})$ の $\mathbb{C}$-部分空間である。

系1　(V,p)：2次元正規Gorenstein特異点で，embedding dim を ν とすると，$L \leq p_g \leq \binom{L+\nu-1}{\nu}$ である。

命題1に気をつければ，S.S-T.Yau の定理3.2 [14] は次の定理として理解できる。

定理4 (Yau)　(V,p)：2次元正規Gorenstein特異点について，$L = p_g$ ならば $p_a \leq 1$ である。

定理3では，特殊な場合に，Yauの定理の逆をresolution process (c)を通して証明しようというのである。まず，(a)⇒(c)についての考察をはじめる。

<u>定理5</u>　(V, p)：2次元正規Gorenstein特異点であって $p_a = 1$ かつ multiplicity $\rho \geqq 3$ とする。この時，(V·p)はGorenstein with maximal embedding dimension (i.e., $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \rho$)であって，$\mathfrak{m}_{V\cdot p}$ でblowing upしても正規である。

証明．次の命題を使う。

<u>命題2</u> (Laufer Prop 5 [6])．(V·p)：正規2次元特異点．$\psi: (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V\cdot p)$ をresolutionであって $\psi^{-1}\mathfrak{m}_{V\cdot p}$：invertibleとする。(V·p)のgeneric hyperplane sectionとして得られる1次元reduced特異点(C, p)を考える。δを(C, p)のconductor numberとすると，$\delta = -\frac{1}{2}(Y_\psi^2 - K_{\tilde{V}} Y_\psi)$ である。

この命題により，$\delta = p_a(Y_\psi) - 1 + \rho$ である。(Prop 2.7 [13])。1次元(C, p)についての定理1により $\delta \geqq \sum_{k=0}^{\infty}\{P(k) - H(k)\}$。ただし，$H(k) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}_{C,p}^{k}/\mathfrak{m}_{C,p}^{k+1}$ であって $P(k)$ はそれに対するHilbert Samuel多項式，すなわち $P(k) \equiv \rho$ である。$H(0) = 1$ より，$1 \geqq p_a(Y_\psi) \geqq \sum_{k \geqq 1}\{\rho - H(k)\}$

を得る。 $\mathcal{O}_{C,p}$ が1次元 Cohen-Macaulay であるから，一般に $\rho = P(k) \geqq H(k)$ $k \geqq 0$. であり (Theorem 1.1 §3 [8]), 更に $\mathcal{O}_{C,p}$ Gorenstein かつ multiplicity $\rho \geqq 3$ だから，$\rho - H(1) \geqq 1$ である (Corollary 3.2 [9]). つまり，$\rho - H(1) = 1$ かつ $\rho - H(k) = 0$ $k \geqq 2$ でなければならない。我々は，$\delta = \sum_{k=0}^{\infty} \{P(k) - H(k)\}$ であることも見たから，(C, p) は1回 p で blowing up すると non-singular である。これより，(V, p) は Gorenstein with maximal embedding dim であって，1回 p で blowing up すると isolated singularity を持つのみである。Sally の定理 (Corollary 5.2 [10]) により，V は1回 p で blowing up して Gorenstein (特に Cohen-Macaulay) であり normal である。. 証終.

<u>補題3</u> (V,p) : 2次元超曲面孤立特異点で次のデータをそなえているとする。① $mult_p V = \rho$ ② $\psi_1 : V_1 \longrightarrow V$ blowing up at p の後に (1) V_1 : 正規 (2) $\exists p_2 \in V_1 \cap \Theta_1^{(1)}$ s.t. $mult_{p_2} V_1 = \rho$. ③ $\psi_2 : V_2 \longrightarrow V_1$ blowing up at p_2 の後に (3) V_2 : 正規 (4) the point $p_3 \in V_2 \cap \Theta_1^{(2)} \cap \Theta_2^{(2)}$

この時，$P_a(V,p) \geqq \frac{1}{8}(\rho-2)^2\rho + \frac{1}{2}(\rho-2) + P_a(V_2, p_3)$ ρ : even

または $P_a(V,p) \geqq \frac{1}{8}\rho(\rho-1)(\rho-3) + \frac{1}{2}(\rho-1) + P_a(V_2, p_3)$ ρ : odd.

証明）．V_2 の resolution を更にとり，(☆) in §1 のようになった (V, p) の resolution $\psi : (\bar{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ をとる。

<u>主張</u> 例外集合 A の既約成分，A_0 と呼ぶ，であって $A_0 \cap |W_3| \neq \phi$，$A_0 \cap |W_2| \neq \phi$，$A_0 \not\subseteq |W_2|$ を満すものが存在する。

（主張の証明）．$(V, p) \subset (\mathbb{C}^3, o)$ として，座標系 (x, y, z) of $(\mathbb{C}^3, o)$ を適当にとり，$\left(\left\{ z^\rho + \sum_{i \geq 2}^{\rho} a_i(x, y) z^{\rho - i} = 0 \right\}, o\right) = (V, p)$ とあらわす。更に $H = \{z = 0\}$ と置いて，次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccccccc}
(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \supset & V & \xleftarrow[\psi_1]{} & V_1 & \xleftarrow[\psi_2]{} & V_2 & \ni p_3 \\
\Big\downarrow & \Big\downarrow \pi & & \Big\downarrow \pi_1 & & \Big\downarrow \pi_2 & \\
(x,y,0) \in & H & \xleftarrow[\psi_1]{} & H_1 & \xleftarrow[\psi_2]{} & H_2 &
\end{array}$$

ただし，ψ_i を ambient 多様体 $\mathbb{C}^3$ の blowing up ととらえて，V_i，H_i はその i-th stage での強変換像である．条件①及び②の(2)により，V_2 は p_3 の近傍で，次の様に書けている．$\left(\left\{ \left(\frac{z}{x^\alpha y^\beta}\right)^\rho + \sum_{i \geq 2} a_i'(x', y') \left(\frac{z}{x^\alpha y^\beta}\right)^{\rho - i} = 0 \right\}, o\right) = (V_2, p_3)$，ただし $\left(x', y', \frac{z}{x^\alpha y^\beta}\right)$ は p_3 の近傍での ambient 多様体の座標系であって，$H_2 = \left\{ \frac{z}{x^\alpha y^\beta} = 0 \right\}$ かつ $\pi_2 : \left(x', y', \frac{z}{x^\alpha y^\beta}\right) \longmapsto (x', y', o)$ という具合に対応している。$p_3 \in H_2 \cap \theta_1^{(2)} \cap \theta_2^{(2)}$ でもあるが，monic 多項式の根の (x', y') についての連続性により，$V_2 \cap \theta_1^{(2)}$ の既約

成分，A_0'と呼ぶ，であって，P_3を通り，かつ $\pi_2(A_0') = H_2 \cap \Theta_1^{(2)}$ となるものが存在する。$(\tilde{V}, A) \to V_2$ による変換の，強変換像をA_0とすれば，主張のA_0となる。(主張 OK!)

さて，$\tilde{V}$上の effective Cartier divisor $B_{(V_2, P_3)}$ であって $|B_{(V_2,P_3)}| = |W_2|$ かつ $P_a(B_{(V_2,P_3)}) = P_a(V_2, P_3)$ なるものをとろう。$P_a(W_2)$を命題2を用いて計算することによって，$\tilde{V}$上で次の不等式が得られる。

$$P_a(A_0 + \alpha W_2 + B_{(V_2,P_3)}) \geqq -\frac{1}{2}\alpha^2\rho + \frac{1}{2}\alpha(\rho^2 - 2\rho + 2) + P_a(B_{(V_2,P_3)})$$

$$\alpha \geqq 0 .$$

証終.

この補題により，定理3の (a) ⇒ (c) がしたがうことは容易である。更に（一見[*]）強く，(a) から次の条件 (c)′ が生ず。

(c′) (i), (ii) (iii) は (c) と同様

(iii)′ $V_{k-1} - \{P_k\}$ の特異点は高々有理2重点

(v)′ $P_k \notin \bigcup_{j \leqq k-2} \Theta_j^{(k-1)}$ かつ，$g \in V_M$ を not rational な点とすると $g \notin \bigcup_{j \leqq M-1} \Theta_j^{(M-1)}$ である。

[*] 実は，定理3の大前提の下で，(i)(ii)(iii) を仮定すると，(c) から (c)′ が出ることを直接計算で（§3 で触れる補題4の証明に際して 補題5の交点に関する大域的な，平面曲線の分類により）確めることができる。

(C)′を仮定しよう。上記補題3の証明にも使ったが，次の可換図式が存在する。

$$\begin{tikzcd} V & V_1 \arrow[l, "\psi_1"'] \arrow[d, "\pi_1"] & V_2 \arrow[l, "\psi_2"'] \arrow[d, "\pi_2"] & \cdots \arrow[l] & V_M \arrow[l, "\psi_M"'] \arrow[d, "\pi_M"] \\ H \arrow[from=u, "\pi"'] & H_1 \arrow[l, "\psi_1"'] & H_2 \arrow[l, "\psi_2"'] & \cdots \arrow[l] & H_M \arrow[l, "\psi_M"'] \end{tikzcd}$$

各 *blowing up* ψ_k の *center* p_k を含む $\Theta_j^{(k-1)}$ と，$\Theta_j^{(M)} \cap V_M$ および $\Theta_j^{(N)} \cap V_N$ 等の状況を，具体的に書いた π_i を用いてながめる。すると，E. Brieskorn が Satz 1 の証明において与えた標準因子の計算公式 [1] を使うことによって，関係式 $L(V, p) = M-1 + L(V_{M-1}, p_M)$ を得る。一方，定理1により，$p_g(V, p) = M-1 + p_g(V_{M-1}, p_M)$ であるから，定理3の $\bigl((C) \Rightarrow (b)\bigr)$ for $M=1$ を仮定すれば，定理3の証明は完了する。

§3.

前節にて，証明を保留した，定理3 $\{(C) \Rightarrow (b)\}$ $M=1$ について，我々は次の結果を得る。

補題4. (V, p)：2次元超曲面孤立特異点で重複度3とする。$\psi : V_1 \longrightarrow V$: *blowing up at* p として，V_1：正規を仮定する。この時

(i) $p_2 \in \Theta_1^{(1)} \cap V_1$ なる点をとる時，$\mathrm{mult}_{p_2} V_1 = 2$ ならば $p_a(V_1, p_2) \leqq 1$ である。

(ii) $V_1 \cap \Theta_1^{(1)}$ の各点における multiplicity が2以下ならば $L(V, p) = p_g(V, p)$ である。

証明は，$(V, p) = (\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}, 0)$.

$f = \sum_{i \geqq 3} f_i(x, y, z)$　　f_i : (x, y, z) の i 次同次多項式.

という表示を用いた，(主に tangent cone f_3 の) 分類である。

次の結果は重要な役割をする。

定理6 ([11]) (V, p) : 2次元正規2重点とする時，次の3条件は同値．(a) $p_a \leqq 1$　(b) $L = p_g$　(c) (V, p) に対する Zariski の canonical resolution をとる時，各正規化は，1回の (reduced) $\mathbb{P}^1$ を center とする blowing up で得られる。

補題5　超曲面孤立特異点 (2次元) $(V, p) \leftarrow V_1$ blowing up at p について．$V_1(\alpha) \leqq \{q \in V_1 : \mathrm{mult}_q V \geqq \alpha\}$ という記号を導入すれば　　$\{f_j = 0\}(\rho)$ も同様に $\mathbb{P}^2$ の curve として定義し，$V_1(\alpha) = \bigcap_{i=\rho}^{\rho+\alpha} \{f_i = 0\}(\alpha + \rho - i) \cap \Theta_1^{(1)}$　　$0 \leqq \alpha \leqq \rho$ を得る。

まず，定理6をもとにして，$\{f_i=0\}$達$(i=3,4,5)$の交わり等と invariants μ, p_g を V_1 の各点について計算し関係づける（分類する）。それを補題5を用いて，$\Theta_1^{(1)} \cap V_1$ 上の分布の問題にして，p_g-formula，adjunction formula によって (V,p) の言葉にする。（しかし，場合の数もけっこう多いし，各個別の計算も，各々不規則である）。

<u>問題</u>　(V,p)：2次元正規 Gorenstein 特異点で maximal embedding dimension（かつ multiplicity ≥ 3）の時，補題4に相当する楕円性に関する十分条件を求めよ。

multiplicity 4以上の場合に筆者は何ら確定的な statement を得ていない。例をひとつ計算して，このノートを終わりたいと思う。

<u>例2</u>　1回 blowing up at p をして，正規であり，かつ各点で Hilbert-Samuel 関数（$\sum_{i=0}^{k} H(k) \geq H^{(1)}(k)$ について考える）が真に（不等式の意味で）良くなっている場合。

これは考えてみるべきだろう。しかし，次の (V,p) を考えると，楕円型であることを出す為には不十分である。

$(V,p)=\{(x,y,z,w)\in \mathbb{C}^4 \mid xy-wz=0 \quad w^2+x^3+y^3+z^7=0\}, 0$

$V_1 \longrightarrow V$ blowing up at p とする。V_1は正規であり，ただひとつの特異点 p_2 を持ち，

$$(V_1, p_2) = (\{(s,t,u) \in \mathbb{C}^3 \mid s^2t^2 + (s^3+t^3)u + u^5 = 0\}, 0)$$

である。$V_2 \longrightarrow V_1$ blowing up at p_2 の後，V_2は smooth である。なお (V, p) は tangential に complete intersection in $\mathbb{C}^4$ で degree $(2,2)$ だから，multiplicity 4 である。この際，$V_1 \to V$ にて，Hilbert-Samuel 関数は真に良くなるが，重複度は4で保たれる。(V_1, p_2)（だから，(V, p)も）楕円型ではない（定理5）。

参考文献

[1] Brieskorn, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildung. Math. Ann 166, 76–102 (1966).

[2] Hironaka, H, Rossi, H.: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex space. Math. Ann. 156, 313–333 (1964).

[3] 樋口，吉永，渡辺公：多変数複素解析入門，森北出版，(1980)

[4]. Kirby, D.: The genus of an algebraic curve. Quart. J. Math Oxford (2) 12 (1961) 217–226.

[5] Laufer, H.B.: On isolated rational singularities. Amer. J. Math. 94 (1972) 597–608.

[6] Laufer, H.B.: Simultaneous resolution of some families of isolated surface singularities. Announcement in Arcata (1981)

[7] Northcott, D.G.: The reduction numbers of one-dimensional local ring Mathematika. vol 6 (1959) 87–90.

[8] Sally, J.D.: Numbers of generators of Ideals in local rings. Lecture Notes in Pure and Applied Math., Marcel Dekker Inc. New York and Basel. vol 35. (1978).

[9]. Sally, J.D.: Tangent cones at Gorenstein singularities. Compositio Math 40 (1980) 167–175.

[10] Sally, J.D.: Cohen-Macaulay local rings of maximal embedding dimension. J. Algebra 56 (1979) 168–183.

[11] 泊 (Tomari).: A geometric characterization of normal two-dimensional singularities of multiplicity two with $p_a \leqq 1$. submitted in Publ. R.I.M.S. (1981).

[12] 泊 : A p_g-formula and elliptic singularity (準備中).

[13] Wagreich, P.: Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92 (1970) 419–454.

[14] Yau, S.S-T.: On maximally elliptic singularities. Trans. A.M.S. 257 (1980) 269–329.